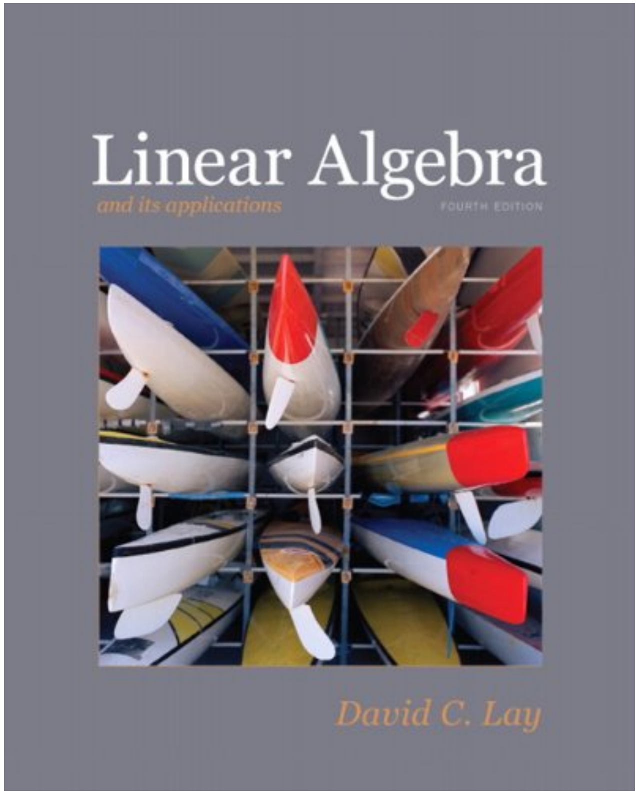
CEU
Universidad
San Pablo

Tema 6: Autovalores y autovectores

Curso 2016/2017

Ruzica Jevtic
Universidad San Pablo CEU
Madrid

Referencias



Lay D. *Linear algebra and its applications (3rd ed)*.
Chapter 5.

Autovalores y autovectores

Aunque una transformación $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ puede mover vectores en multitud de direcciones, a menudo pasa que existen vectores especiales para los cuales, la acción de A sobre los mismos es bastante sencilla.

Ejemplo

Consideremos la transformación lineal $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, y los vectores $\mathbf{u} = (-1, 1)$ y $\mathbf{v} = (2, 1)$

$$T(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

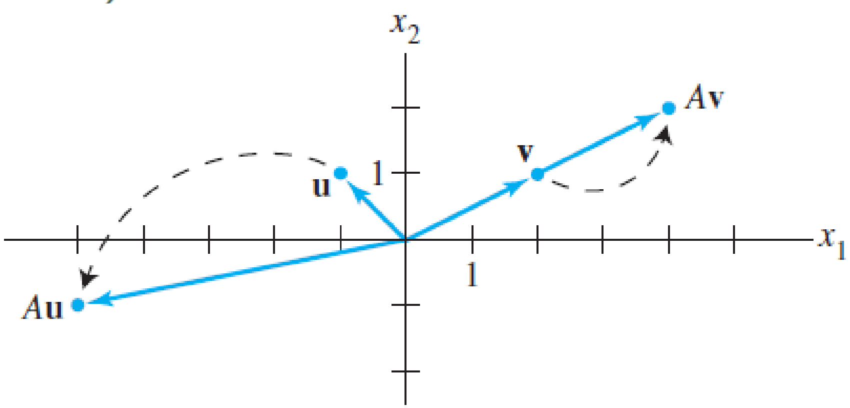


FIGURE 1 Effects of multiplication by A.

El vector **u** bajo la transformación T cambia su dirección y su módulo, pero en cambio, **v** sólo cambia su módulo. De hecho, $A\mathbf{v}$ tan sólo "estira" o "dilata" **v**.

Autovalores y autovectores

Definición: Autovalor (valor propio o *eigenvalue*) **y Autovector** (vector propio o *eigenvector*)

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{nxn}$, λ es un **autovalor** de A, si existe una solución no trivial $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ de la ecuación

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

La solución **v** es el **autovector** asociado al *autovalor* λ.

Ejemplo (…continuación)

En el ejemplo anterior, **v** era un *autovector* con *autovalor* 2, porque (2, 1) → (4, 2), mientras que **u** no era un *autovector*.

Autovalores y autovectores

Ejemplo

Demostrar que $\lambda = 7$ es un autovalor de $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Autovalores y autovectores

Ejemplo

Demostrar que $\lambda = 7$ es un autovalor de $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución

El escalar 7 es un autovalor de A, si y sólo sí, la ecuación $A\mathbf{v} = 7\mathbf{v}$ tiene una solución no trivial. O lo que es lo mismo:

$$A\mathbf{v} - 7\mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Para resolver el sistema homogéneo, calculamos la matriz:

$$A - 7I = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, cualquier vector de la forma $\mathbf{v} = (\, v_1, v_1 \,)$, con $v_1 \neq 0$, satisface la ecuación y es un *autovector* correspondiente a $\lambda = 7$.

Autovalores y autovectores

Teorema

En general, los *autovectores* son soluciones de la ecuación

$$(A - \lambda I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Esto es, todos los *autovectores* pertenecen al $\mathrm{Nul}\{A - \lambda I\}$. Este espacio es denominado **espacio propio**, **autoespacio** o ***eigenspace*** *asociado a* λ.

Ejemplo (…continuación)

Vemos que tenemos un completo conjunto de vectores asociados a $\lambda = 7$. Este es un espacio propio (*eigenspace*):

$$\text{Eigenspace}\{7\} = \{(v_1, v_1) \ \ \forall v_1 \in \mathbb{R}\}$$

Es la recta que pasa por el origen, con dirección (1, 1).

Otro autovalor de la matriz *A* es $\lambda = -4$.

$$\text{Eigenspace}\{-4\} = \left\{\left(v_1, -\frac{5}{6} v_1\right) \ \ \forall v_1 \in \mathbb{R}\right\}$$

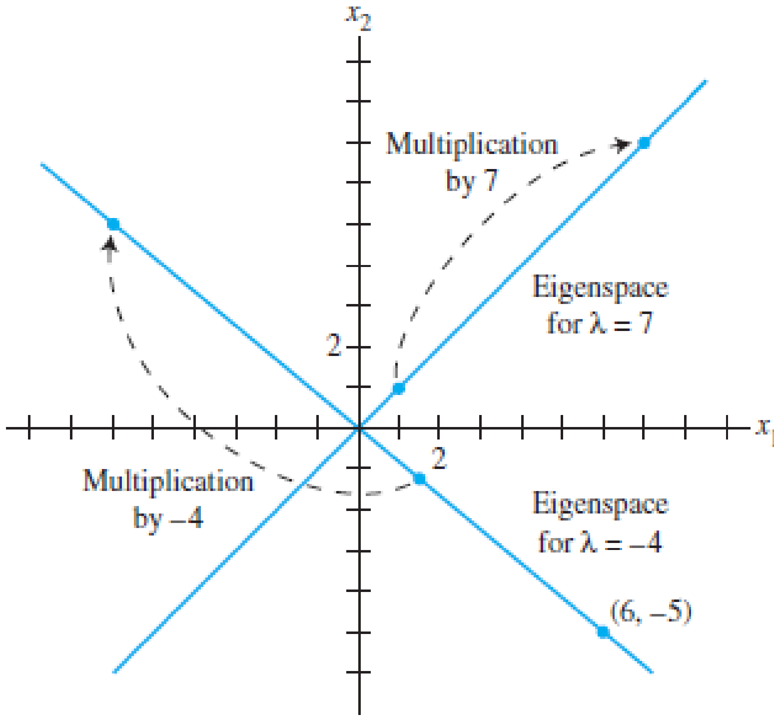


FIGURE 2 Eigenspaces for $\lambda = -4$ and $\lambda = 7$.

Ejemplo

Sabiendo que $\lambda = 2$ es un autovalor de $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$, encontrar una base para su espacio propio (*eigenspace*).

Ejemplo

Sabiendo que $\lambda = 2$ es un autovalor de $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$, encontrar una base para su espacio propio (*eigenspace*).

Solución

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

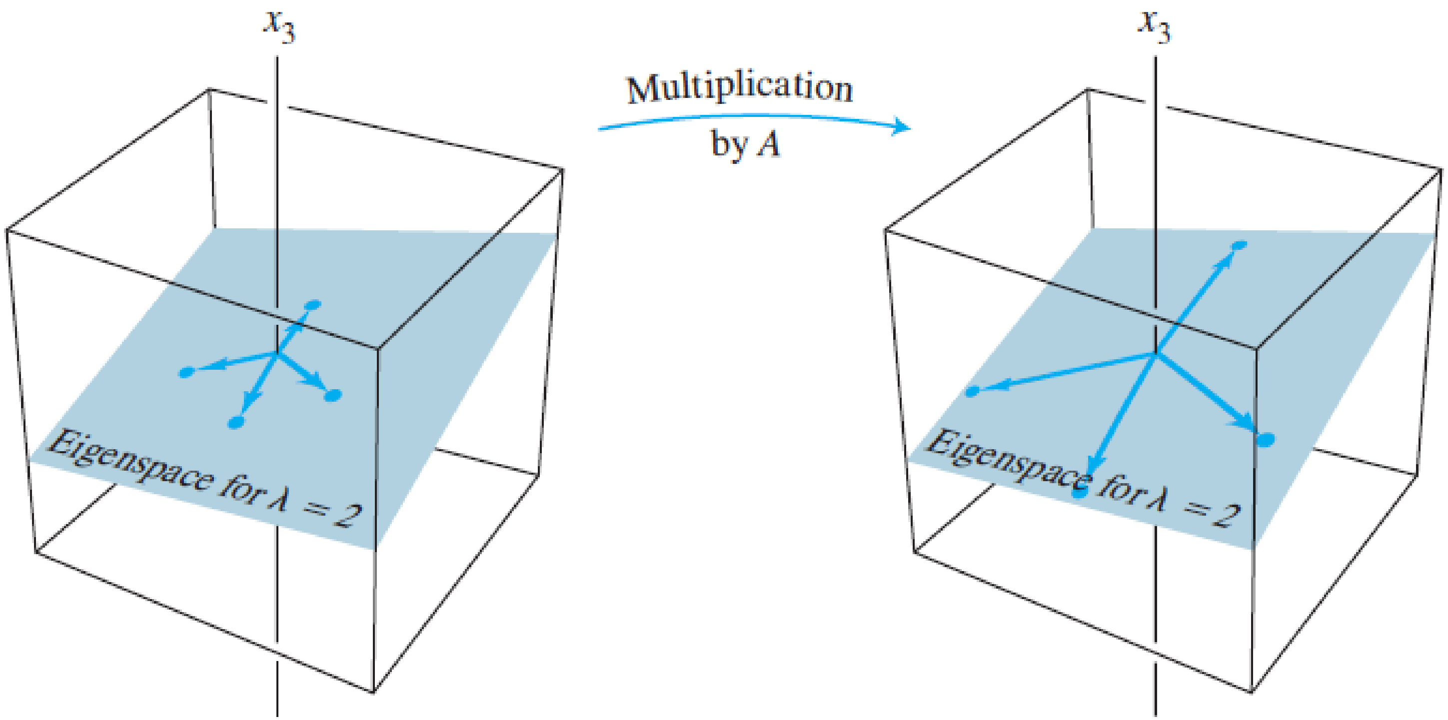
Por lo tanto, cualquier vector que satisfaga esta ecuación debe ser de la forma:

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 - 3x_3 \Rightarrow \mathrm{Eigenspace}\{2\} \ni \mathbf{x} = x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la base está formada por los vectores (½, 1, 0) y (-3, 0, 1).

Ejemplo (…continuación)

Dentro de este espacio propio (*eigenspace*), A actúa como una dilatación.



Teorema

Los *autovalores* de una matriz triangular *A* son los elementos de su diagonal principal (a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$)

Demostración

Consideremos la matriz $A - \lambda I$

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones $A - \lambda I = \mathbf{0}$ tiene soluciones no triviales si, al menos, una de las entradas en la diagonal es 0. Por lo tanto, debe ser $\lambda = a_{ii}$ para cualquier *i*. Variando el *i* desde 1 a *n*, obtenemos que todos los elementos en la diagonal principal son los *n* autovalores de la matriz *A*.

Autovalores y autovectores

Ejemplo

Los autovalores de $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ son $\lambda = 3, 0, 2$

Los autovalores de $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ son $\lambda = 4, 1$

Teorema

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ los r autovectores asociados a r diferentes autovalores. Entonces el conjunto $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \}$ es linealmente **independiente**

Autovalores y autovectores

Ecuaciones Diferenciales

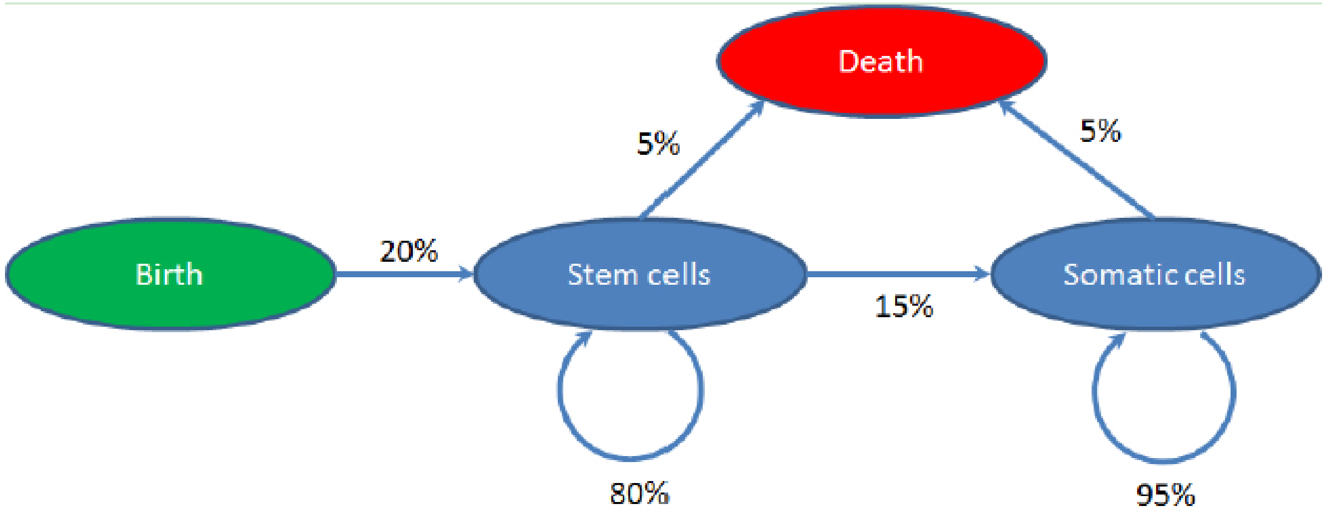
Asumimos que tenemos dos poblaciones de células: células madre y células maduras. Cada día medimos el número de ellas y observamos que:

Células madre:

- 80% permanecen como células madre
- 15% se han diferenciado en células somáticas
- 5% han muerto
- Hay un 20% de nuevas células madre

Células somáticas:

- 95% permanecen como células somáticas
- 5% han muerto



Autovalores y autovectores

Ecuaciones Diferenciales (…continuación)

Si llamamos $x_{stem}^{(k)}$ al número de células madre del día k, y $x_{somatic}^{(k)}$ al número de células somáticas del mismo día, entonces la siguiente ecuación refleja la dinámica del sistema:

$$\begin{pmatrix} x_{stem}^{(k+1)} \\ x_{somatic}^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.15 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{stem}^{(k)} \\ x_{somatic}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Asumimos que en el día 0 hay 10.000 células madre, y 0 células somáticas. Entonces, la evolución en el tiempo es:

$$\begin{pmatrix} x_{stem}^{(1)} \\ x_{somatic}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.15 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{stem}^{(0)} \\ x_{somatic}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.15 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10,000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,000 \\ 1,500 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{stem}^{(2)} \\ x_{somatic}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.15 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{stem}^{(1)} \\ x_{somatic}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.15 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10,000 \\ 1,500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,000 \\ 2,925 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones Diferenciales

El modelo anterior es de la forma

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = A\mathbf{x}^{(k)}$$

La manera más simple de construir una solución a la ecuación previa es tomando un autovector $\mathbf{x}_1$ y su correspondiente autovalor λ:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \lambda_1^k \mathbf{x}_1$$

Esto es realmente una solución porque:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = A\mathbf{x}^{(k)} = A(\lambda_1^k \mathbf{x}_1) = \lambda_1^k (A\mathbf{x}_1) = \lambda_1^k (\lambda_1 \mathbf{x}_1) = \lambda_1^{k+1} \mathbf{x}_1$$

Ejercicios

- Tema 6_Enunciados de ejercicios I
  - Ejercicio 5.1.1
  - Ejercicio 5.1.3
  - Ejercicio 5.1.9
  - Ejercicio 5.1.17
  - Ejercicio 5.1.19
  - Ejercicio 5.1.26

Índice de contenidos

- Definición de autovalores y autovectores
- Ecuación característica
- Diagonalización
- Autovalores complejos

Ecuación característica

Ejemplo

Encontrar los autovalores de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

Solución

Necesitamos encontrar valores escalares λ, tales que la ecuación:

$$(A - \lambda I)\, \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

tenga soluciones no triviales. Por el Teorema de la Matriz Invertible, sabemos que este problema es equivalente a encontrar valores λ tales que:

$$|A - \lambda I| = \mathbf{0}$$

En este caso,

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Ecuación característica

Ejemplo (…continuación)

Solución (…continuación)

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= (2-\lambda)(-6-\lambda)-(3)(3)\\ &= -12+6\lambda-2\lambda+\lambda^2-9\\ &= \lambda^2+4\lambda-21\\ &= (\lambda-3)(\lambda+7)\end{aligned}$$

$$\lambda^2+4\lambda-21=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot(-21)}}{2\cdot 1}=\begin{cases}-7\\ 3\end{cases}$$

Ecuación característica

Definición: Ecuación característica

Un escalar λ es un autovalor de la matriz $A \in \mathcal{M}_{nxn}$, si y sólo si, es solución de la **ecuación característica**

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = \mathbf{0}$$

El determinante de $A - \lambda I$ es denominado el **polinomio característico.**

Ecuación característica

Ejemplo

Calcular los autovalores de $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda)$$

cuyas soluciones son $\lambda = 5$ (con multiplicidad 2), $\lambda = 3$, y $\lambda = 1$.

Ejemplo

Encontrar los autovalores de una matriz cuyo polinomio característico es:

$$|A - \lambda I| = \lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4 = \lambda^4(\lambda^2 - 4\lambda - 12) = \lambda^4(\lambda - 6)(\lambda + 2) = 0$$

Las soluciones son $\lambda = 0$ (con multiplicidad 4), $\lambda = 6$, y $\lambda = -2$.

Ecuación característica

Definición: Similaridad entre matrices

Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{nxn}$, A es ***semejante*** a B, si y sólo si, existe una matriz invertible $P \in \mathcal{M}_{nxn}$, tal que:

$$B = P^{-1}AP$$

¡Cuidado! La semejanza no es lo mismo que la equivalencia por filas. *A* y *B* son equivalentes por filas si existe una *E* tal que *B* = *EA*, siendo *E* invertible y el producto de matrices de operaciones por filas

Ecuación característica

Teorema

Si *A* es ***semejante*** a *B*, entonces *B* es ***semejante*** a *A*

Demostración

Es suficiente tomar la definición de *A semejante a B* y resolver para *B*. Si multiplicamos por *P* por la izquierda, tenemos

$$B = P^{-1}AP \quad \Rightarrow \quad PB = AP$$

Ahora multiplicamos por P^{-1} por la derecha (P^{-1} existe porque *P* es invertible)

$$PB = AP \quad \Rightarrow \quad PBP^{-1} = A$$

y esta es la definición de *B semejante a A*.

Teorema

Si *A* y *B* son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico.

Ejercicios

- Tema 6_Enunciados de ejercicios II
  - Ejercicio 5.2.1
  - Ejercicio 5.2.2
  - Ejercicio 5.2.9
  - Ejercicio 5.2.20
  - Ejercicio 5.2.24

Índice de contenidos

- Definición de autovalores y autovectores
- Ecuación característica
- Diagonalización
- Autovalores complejos

CEU Universidad San Pablo

Diagonalización

Definición de Diagonalización

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{nxn}$ es diagonalizable si existen $P, D \in \mathcal{M}_{nxn}$donde P es invertible y D es diagonal tal que:

$$A = PDP^{-1}$$

Nota

La diagonalización simplifica el cálculo de las potencias de A (A^k).

Ejemplo

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad D^2 = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} \qquad D^3 = \begin{pmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

Diagonalización

Ejemplo

Si A es una matriz que se puede representar como A=PDP^{-1}, las potencias de A se pueden calcular de la siguiente manera:

$$A^2=A\cdot A=\left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)=(PD)\left(P^{-1}P\right)\left(DP^{-1}\right)=PD^2\,P^{-1}$$

$$A^3=A^2\cdot A=PD^2P^{-1}PDP^{-1}=PD^3P^{-1}$$

$$A^k=PD^kP^{-1}$$

Ejemplo

Sea $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}7 & 2\\ -4 & 1\end{pmatrix}$. Si presentamos *A* en forma $A=PDP^{-1}$, con las matrices

$\mathrm{P}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, la potencia de A es:

$$A^k=PD^kP^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5^k & 0\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

Diagonalización

Teorema

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{nxn}$ es diagonalizable si y solo sí A tiene n autovectores linealmente independientes.

En este caso, podemos construir la matriz P asignando los autovectores a las columnas de P, y la matriz D se puede construir como una matriz diagonal con los autovalores correspondientes actuando como los elementos de la diagonal.

$$P=(\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \ldots.\mathbf{x}_n) \qquad D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda_2 \ldots\ 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 0 & 0 \ldots \lambda n \end{pmatrix}$$

CEU Universidad San Pablo

Ejemplo

Diagonalizar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

Paso 1: Encontrar los autovalores de A

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$ (doble).

Paso 2: Encontrar el conjunto de autovectores linealmente independiente

$\underline{\lambda = 1}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo (…continuación)

Paso 2: Encontrar el conjunto de autovectores linealmente independientes

$\underline{\lambda = 1}$

$$A - \lambda I = \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_3, x_2 = -x_3 \Rightarrow \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = -2}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3 \Rightarrow \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Construir P y D

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Diagonalización

Ejemplo (…continuación)

Paso 4: Comprobar si todo está bien (a mano o en Octave)

P es invertible, y por lo tanto $\det(\boldsymbol{P}) \neq \mathbf{0}$

En Octave:

P=[1 -1 -1; -1 1 0; 1 0 1];

det(P)

Se tienen que cumplir: $A = PDP^{-1} \Rightarrow AP = PD$

En Octave:

A=[1 3 3; -3 -5 -3; 3 3 1];

P=[1 -1 -1; -1 1 0; 1 0 1];

D=[1 0 0; 0 -2 0; 0 0 -2];

A*P

P*D

Diagonalización

Ejemplo

Diagonalizar la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

Paso 1: Encontrar los autovalores de A

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$ (doble).

Paso 2: Encontrar el conjunto de autovectores linealmente independiente

$\underline{\lambda = 1}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -4 & -7 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalización

Ejemplo (…continuación)

Paso 2: Encontrar el conjunto de autovectores linealmente independientes

$\underline{\lambda = 1}$

$$A - \lambda I = \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_3, x_2 = -x_3 \Rightarrow \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = -2}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2 - \frac{3}{4}x_3, \frac{1}{4}x_3 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(A no se puede diagonalizar porque no existe el conjunto de tres vectores linealmente independientes)

Diagonalización

Teorema

Si una matriz $A \in \mathcal{M}_{nxn}$ tiene n diferentes autovalores, entonces es diagonalizable.

Demostración

Aplicar teoremas previos.

Ejemplo

Es $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ diagonalizable?

Solución: A es una matriz triangular y sus autovectores son 5, 0 y -2. Como todos son distintos, según el teorema anterior, A es diagonalizable.

Diagonalización

- Y si una matriz $A \in \mathcal{M}_{nxn}$ no tiene n diferentes autovalores?

Teorema

Asumimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{nxn}$ tiene $p \leq n$ diferentes autovalores. Si d_k es la dimensión del autoespacio correspondiente al autovalor λ_k, entonces:

1. d_k es menor o igual que la multiplicidad de λ_k
2. A es diagonalizable si y solo sí d_k es igual a la multiplicidad de λ_k. En este caso: $\sum_{k=1}^{p} d_k = n$
3. Si A es diagonalizable y B_k son las bases de cada uno de autoespacios, entonces $\{B_1, B_2, \dots B_k\}$ es la base de $\mathbb{R}^n$.

CEU Universidad San Pablo

Diagonalización

Ejemplo

Factorizar la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ en forma $A = PDP^{-1}$

Solución: Los autovalores y autovectores de la matriz A son:

$$\lambda = 5, \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -16 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{P} = \begin{pmatrix} -8 & -16 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -3, \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

- Tema 6_Enunciados de ejercicios III
  - 5.3.1
  - 5.3.23
  - 5.3.27
  - 5.3.28
  - 5.3.29
  - 5.3.31
  - 5.3.32
  - 5.3.33 (Octave)

Índice de contenidos

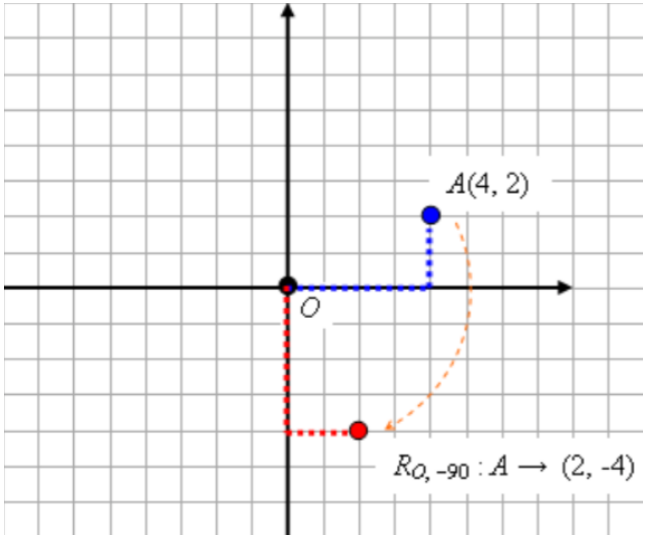
- Definición de autovalores y autovectores
- Ecuación característica
- Diagonalización
- Autovalores complejos

Autovalores complejos

- Autovalores complejos siempre están relacionados con la rotación sobre algún eje

Ejemplo

La transformación lineal $T(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$ es la rotación de 90º.



Obviamente no puede haber ningún autovector real porque todos los vectores están rotando. Todos los autovalores son complejos:

$$|A - \lambda I| = 0 = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

CEU Universidad San Pablo

Autovalores complejos

Ejemplo (…continuación)

Si aplicamos esta transformación a los vectores complejos:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Encontrar los autovalores y autovectores de $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{11}{10} \end{pmatrix}$.

Solución:

Para encontrar autovalores, hay que resolver la ecuación caracteristica:

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{11}{10} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{8}{5}\lambda + 1 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{5} \pm \frac{3}{5} i$$

CEU Universidad San Pablo

Autovalores complejos

Ejemplo (…continuación)

$$\lambda_1 = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right) & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{11}{10} - \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} + \frac{3}{5}i & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{10} + \frac{3}{5}i \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x1 = \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i\right)x2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} -2 - 4i \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i = \lambda_1^*$$

$$A - \lambda_2 I \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x1 = -\left(\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i\right)x2 \Rightarrow \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} -2 + 4i \\ 5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v_2^*}$$

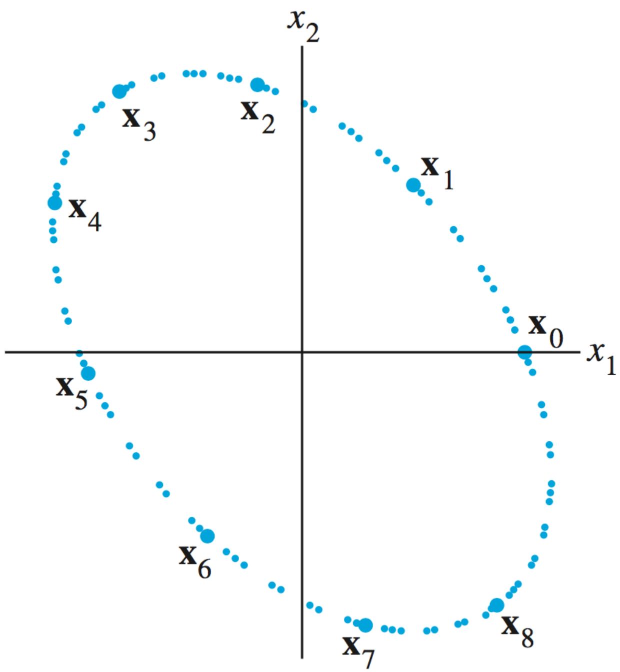
Ejemplo (…continuación)

La aplicación de A en $\mathbb{R}^2$ es la rotación. Para ver esto, empezamos con el punto x0=(2,0) y calculamos

$$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} .5 & -.6 \\ .75 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} .5 & -.6 \\ .75 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.4 \\ 2.4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2, \ldots$$



La figura muestra x_0, x_1, … , x_8 con puntos grandes y x_9, …, x_{100} con puntos pequeños

Autovalores complejos

Definición: Vectores y matrices conjugados

El vector conjugado se define de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}^* = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \dots \\ v_n^* \end{pmatrix}$$

De la misma manera, la matriz conjugada se define como:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \; \dots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \; \dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} \; a_{n2} \; \dots a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* \; a_{12}^* \; \dots a_{1n}^* \\ a_{21}^* \; a_{22}^* \; \dots a_{2n}^* \\ \dots \\ a_{n1}^* \; a_{n2}^* \; \dots a_{nn}^* \end{pmatrix}$$

Teorema: Propiedades

$(rv)^* = r^* v^*$ $(AB)^* = A^* B^*$

$(Av)^* = A^* v^*$ $(rA)^* = r^* A^*$

CEU Universidad San Pablo

Autovalores complejos

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Sus autovalores son $\lambda = a \pm bi$ y sus correspondientes autovectores son $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bi \\ b - ai \end{pmatrix} = (a + bi)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - bi \\ b + ai \end{pmatrix} = (a - bi)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

En el caso especial, donde $a = \cos\varphi$ y $\mathrm{b} = \sin\varphi$, tenemos la matriz de rotación cuyos autovalores son:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \cos\varphi \pm \sin\varphi = e^{\pm i\varphi}$$

Ejercicios

- Tema 6_Enunciados de ejercicios IV
  - 5.5.1
  - 5.5.3
  - 5.5.7
  - 5.5.9